УДК 004.3

Дичка И.А., Жабина В.В.

СОВМЕЩЕНИЕ ЗАВИСИМЫХ ОПЕРАЦИЙ В НЕАВТОНОМНОМ РЕЖИМЕ

Традиционные методы параллельной арифметики позволяют распараллеливание операций на уровне обработки машинных слов, когда перед выполнением каждой операции операнды в операционных устройствах (ОУ) представлены всеми разрядами. Однако в ряде случаев, например, при реализации итерационных процессов, вычислении многоместных выражений путем суперпозиции функций с меньшим числом аргументов возникает необходимость выполнения последовательностей операций зависимых по данным. Распараллеливание вычислений на уровне обработки машинных слов в данном случае не представляется возможным. Повышение быстродействия вычислительных систем при выполнении цепочек зависимых операций может быть достигнуто за счет применения методов машинной арифметики, позволяющих выполнять зависимые по данным операции в режиме частичного совмещения с использованием избыточных систем счисления [1]. Способы построения таких вычислительных систем известны [2]. В их состав входят квазипараллельные ОУ, позволяющие совмещать выполнение зависимых операций на уровне обработки разрядов слов следующим образом.

На каждом шаге в ОУ вводится по одному разряду операндов (в простейшем случае) и формируется один разряд результата. При этом разряд промежуточного результата, полученный на i - м шаге в одном ОУ при выполнении j - й операции, может быть использован на (i+1)-м шаге в другом ОУ при выполнении (j+1)-й операции. При таком режиме вычислений выполнение последующей операции будет начинаться не после завершения выполнения предыдущей операции, а сразу же после получения первого разряда результата этой операции. Режим работы таких ОУ называют неавтономным, так как для выполнения последовательности операций необходимо несколько ОУ, которые синхронно обмениваются информацией в процессе работы.

Методы неавтономной арифметики, как правило, рассматриваются в симметричных избыточных системах счисления, которые позволяют реализовать любые функции, как с положительными, так и с отрицательными частными производными [1]. Однако на практике широко применяются вычислительные методы, основанные на реализации функций с положительными частными производными. Это имеет место, например, при реализации методов численного интегрирования, цифровой обработки сигналов, вычислении полиномов. В случае положительных аргументов вычисления могут производиться в смещенных системах счисления, что позволяет упростить квазипараллельные ОУ.

В работе на примере операции умножения исследуется влияние величины основания смещенной избыточной системы счисления на сложность ОУ и время выполнения последовательностей операций, зависимых по данным.

Показано, что при умножении чисел $X=\sum_{i=1}^{n} x_i k^{-i}$ и $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i k^{-i}$ можно формировать поразрядно результат $Z=\sum_{i=1}^{m} z_i k^{-i}$ с задержкой на p шагов, где $x_i, y_i \in \{\overline{0,q}\}$ (q – максимальная цифра результата). Минимальное значение задержки определяется так:

$$p = \left]\log_k \frac{2q}{q-r+1}\right[. \tag{8}$$

(9)

Один шаг умножения сводится к следующему. Находится промежуточная переменная

$$H_i = kR_{i-1} + k^{-p} X_{i-1} y_i + k^{-p} Y_{i-1} x_i + k^{-p-i} y_i x_i ,$$

где y_i, x_i – цифры операндов с весом k^{-i}; X_{i-1}, Y_{i-1} – операнды, представленные $i-1$ старшими разрядами. Начальными являются значения $i=1,\ X_0 = Y_0 = R_0 = Z_0 = 0$.

На основании величины переменной H_i получают очередную цифру результата $z_i = \mathrm{ent}\, H_i$ и очередной остаток $R_i = \mathrm{rest}\, H_i$.

Доказано, что предлагаемый метод умножения может быть реализован в смещенных системах счисления, для которых выполняется условие $q-k+1>0$, откуда $q>k-1$. Так как q целое число, то минимальное его значение должно быть не меньше основания k системы счисления. Естественно, что все системы, отвечающие указанному выше требованию, являются избыточными.

Таким образом, рассмотренный выше метод умножения может быть реализован в любой избыточной смещенной системе счисления с цифрами $\{\overline{0,q}\}$, где q удовлетворяет условию $q \ge k$. Минимальной избыточностью среди них обладают системы с цифрами $\{\overline{0,k}\}$. Эти системы счисления содержат только на одну цифру больше, чем канонические системы. Например, при $k=2$ и $k=10$ системы счисления, обладающие минимальной избыточностью, содержат соответственно цифры $\{0{,}1{,}2\}$ и $\{\overline{0{,}10}\}$.

Выбор системы счисления при заданном основании оказывает влияние как на запаздывание при формировании разрядов произведения, выраженное в числе шагов, так и на число информационных входов и выходов операционных устройств. Естественно, что с увеличением числа возможных цифр в общем случае увеличивается и число линий, необходимых для передачи цифр от одного операционного устройства к другому. При использовании для представления цифр избыточной системы пространственно-унитарного кода эта зависимость прямо пропорциональная, а при использовании двоичного позиционного кода – логарифмическая. С точки зрения уменьшения числа шин для передачи информации следует отдать предпочтение системам счисления с меньшей избыточностью, то есть с меньшим числом различных цифр. Однако в общем случае с уменьшением q возрастает p, что вытекает из (1), а следовательно, увеличивается запаздывание при формировании разрядов результата.

Для систем счисления с минимальной избыточностью $p = 1 + \lceil \log_k 2 \rceil$ независимо от основания системы счисления $p=2$. С ростом q (считаем, что $k = const$) аргумент логарифмической функции в (1) приближается сверху к 2. Следовательно, существуют системы счисления с основанием $k>2$, для которых $p=1$. Очевидно, что такие системы должны удовлетворять условию $2q/(q-k+1) \le k$ или

$$q \ge \frac{k^2-k}{k-2} . \qquad (10)$$

Например, при $k=10$ система счисления с минимальной избыточностью, удовлетворяющая условию (10) содержит цифры $\{\overline{0{,}12}\}$. В общем случае системы счисления с минимальной избыточностью, для которых $p=1$, определяются из условия

$$q = \left]\frac{k^2 - k}{k - 2}\right[.$$

Очевидно, что применять системы счисления с большей избыточностью нецелесообразно, так как к уменьшению запаздывания при формировании цифр произведения это не приводит, а число информационных входов и выходов операционных устройств в общем случае возрастает. В связи с этим число систем счисления, представляющих практический интерес, значительно уменьшается.

Определена зависимость цикла формирования цифры результата от величины основания двоично-кодированных систем счисления. В этом случае для построения ОУ можно использовать обычную двоичную аппаратуру, в том числе, двоичные сумматоры. Для однотактного ОУ длительность цикла определяется временем формирования значения промежуточной переменной H_i по формуле (2) и записи информации в регистр.

Наибольший интерес представляют системы с основанием 2^j ($j = 1,2,3,\ldots$), поскольку они наиболее просто реализуются на двоичной аппаратуре.

Каждое слагаемое в (2), кроме первого, может быть сформировано с помощью сдвигателей, число которых равно числу двоичных разрядов в цифрах x_i, y_i. Поскольку максимальное значение цифр x_i, y_i не превышает q, то число двоичных разрядов для их представления равно $\lceil \log_2 q \rceil$. Тогда общее число слагаемых при вычислении (2) составляет

$$N = 1 + 3\lceil \log_2 q \rceil.$$

Для одновременного сложения нескольких чисел можно использовать дерево сумматоров без распространения переносов [3]. Перенос распространяется только на последнем ярусе, на котором суммируются два слагаемых. Тогда длительность цикла формирования цифры результата составляет

$$T_Ц = \left(\left]\log_{\frac{3}{2}} N\right[+ \lceil \log_2 n \rceil + 3\right)\tau_{CM},$$

где τ_{CM} – задержка сигналов в одноразрядном сумматоре.

Для сравнения эффективности ОУ, работающих в разных системах счисления, при выполнении последовательности из L зависимых по данным операций используется формула

$$T = \left[n - 1 + \sum_{j=1}^{L} (k_j + 1) T_ц\right]. \qquad (12)$$

Определена зависимость времени вычисления последовательности операций по формуле (3) от величины основания системы счисления и длины последовательности операций (рис. 1).

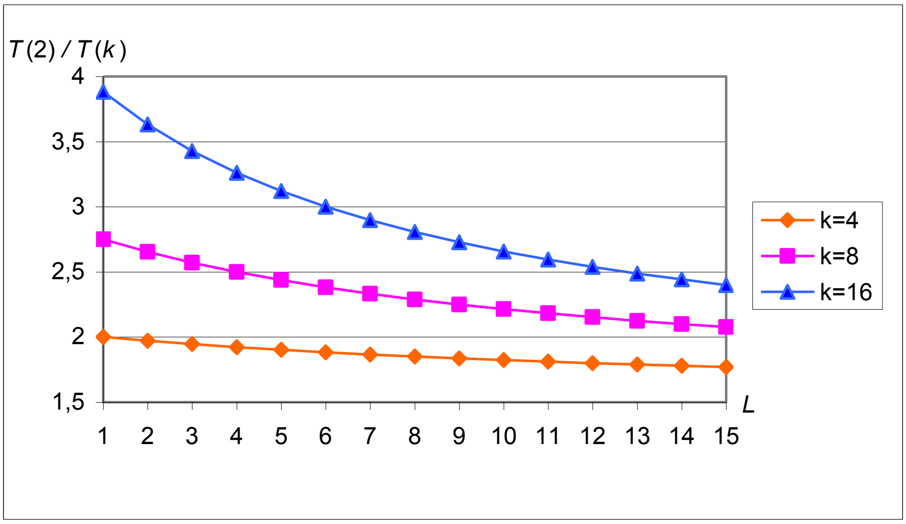

Рис. 1. Зависимость отношения $T(2)/T(k)$ от длины цепочки операций L при разрядности операндов в двоичном представлении $n = 64$:
$T(2)$ – длительность вычислений для двоичной системы счисления; $T(k)$ – длительность вычислений для системы счисления с основанием k =4, 8 и 16

Применение избыточных смещенных систем счисления с основанием $k > 2$ позволяет уменьшить время выполнения последовательности операций по сравнению с двоичной системой счисления при любой длине последовательности операций, причем, выигрыш во времени увеличивается с уменьшением длины последовательности.

Благодаря поразрядной передачи данных между квазипараллельными ОУ уменьшается число связей между компонентами устройств по сравнению с параллельными ОУ, что особенно важно при реализации систем в интегральном исполнении (например, на ПЛИС), поскольку уменьшение внутренних и внешних связей повышает надежность систем и более экономично использует ресурс интегральных схем.

Число линий связей между ОУ для передачи разрядов операндов с увеличением основания системы счисления возрастает по логарифмической зависимости, то есть незначительно по сравнению с длиной параллельных кодов (32-64 разрядов), с которыми оперируют параллельные ОУ.

1. Жабин В.И., Корнейчук В.И., Тарасенко В.П. Некоторые машинные методы вычисления рациональных функций многих аргументов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №12. – С. 145-154.
2. Карцев М.А., Брик В.А. Вычислительные системы и синхронная арифметика. – М.: Радио и связь, 1981. – 360 с.